

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

เรื่อง การหาค่าลอการิทึม

เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้

เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

ลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณ คือ **ลอการิทึมสามัญ (common logarithm)** ซึ่งหมายถึง ลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10 ในการเขียนลอการิทึมสามัญนิยมเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ เช่น $\log_{10} 3$ จะเขียนแทนด้วย $\log 3$ และ $\log_{10} N$ จะเขียนแทนด้วย $\log N$

เนื่องจากจำนวนจริงบวก N ใด ๆ สามารถเขียนในรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม ได้เสมอ เช่น

$$1200 = 1.2 \times 10^3$$

$$0.035 = 3.5 \times 10^{-2}$$

การเขียน N ในรูปนี้สามารถนำมาช่วยหาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบางจำนวนได้จากค่าลอการิทึมที่ทราบ

ถ้ากำหนดค่า N ให้สามารถหาค่าของ $\log N$ ได้ ในทางตรงกันข้ามถ้ากำหนดค่าของ $\log N$ ก็ สามารถหา N ได้ และเรียก N ว่า **แอนติลอการิทึม (antilogarithm)** ของ $\log N$

บทนิยาม A เป็นแอนติลอการิทึมของ B ก็ต่อเมื่อ $B = \log A$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาค่าลอการิทึมได้
2. นักเรียนสามารถหาแอนติลอการิทึมได้

สาระการเรียนรู้

ลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณ คือ **ลอการิทึมสามัญ (common logarithm)** ซึ่งหมายถึง ลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10 ในการเขียนลอการิทึมสามัญนิยมเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ เช่น $\log_{10} 3$ จะเขียนแทนด้วย $\log 3$ และ $\log_{10} N$ จะเขียนแทนด้วย $\log N$ ในการคำนวณค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบางจำนวนอาจหาได้จากค่าลอการิทึมที่ทราบ

พิจารณาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบวกที่สามารถเขียนอยู่ในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม โดยอาศัยสมบัติของลอการิทึมดังนี้

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 0.1 = \log 10^{-1} = (-1)\log 10 = -1$$

$$\log 0.01 = \log 10^{-2} = (-2)\log 10 = -2$$

$$\log 10^n = n\log 10 = n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เนื่องจากจำนวนจริงบวก N ใดๆ สามารถเขียนในรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม ได้เสมอ เช่น

$$1200 = 1.2 \times 10^3$$

$$0.035 = 3.5 \times 10^{-2}$$

การเขียน N ในรูปนี้สามารถนำมาช่วยหาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบางจำนวนได้จากค่าลอการิทึมที่ทราบดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\log 5760$ เมื่อ $\log 5.76 \approx 0.7604$

วิธีทำ จาก $\log 5760 = \log (5.76 \times 10^3)$

$$= \log 5.76 + \log 10^3$$

$$\approx 0.7604 + 3$$

$$\text{และ } 0.7604 + 3 = 3.7604$$

$$\text{ดังนั้น } \log 5760 \approx 3.7604$$

ถ้ากำหนดค่า N ให้สามารถหาค่าของ $\log N$ ได้ ในทางตรงกันข้ามถ้ากำหนดค่าของ $\log N$ ก็สามารถหา N ได้ และเรียก N ว่า **แอนติลอการิทึม (antilogarithm)** ของ $\log N$

บทนิยาม A เป็นแอนติลอการิทึมของ B ก็ต่อเมื่อ $B = \log A$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\log 5.71 \approx 0.7566$ และ $\log N = 3.7566$ จงหาค่าของ N

วิธีทำ จาก $\log N = 3.7566$

$$= 0.7566 + 3$$

และ $\log 5.71 \approx 0.7566$

จะได้ $\log N = \log 5.71 + 3\log 10$

และ $\log 5.71 + 3\log 10 = \log 5.71 + \log 10^3$

$$= \log (5.71 \times 10^3)$$

$$= \log (5710)$$

จะได้ $\log N \approx \log 5710$

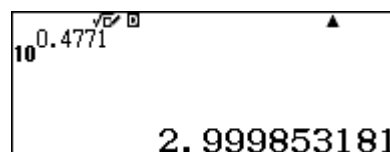
ดังนั้น $N \approx 5710$

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น 5710 เป็นแอนติลอการิทึมของ 3.7566

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูใช้การถามตอบเพื่อทบทวนความรู้เดิม เรื่อง นิยามและทฤษฎีบทของฟังก์ชันลอการิทึม
2. ครูทบทวนการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ในการหาค่าลอการิทึม
3. นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาค่าลอการิทึมและแอนติลอการิทึม ในใบกิจกรรมที่ 13-1, 13-2 และ 13-3 ดังนี้ (ขั้นการสำรวจ)
ใบกิจกรรมที่ 13-1 เรื่อง มารูจักลอการิทึมสามัญกันเถอะ
ใบกิจกรรมที่ 13-2 เรื่อง การหาค่าลอการิทึม
ใบกิจกรรมที่ 13-3 เรื่อง แอนติลอการิทึม
4. ครูให้นักเรียนสังเกตค่าลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10 และไม่มีฐานกำกับ จากใบกิจกรรมที่ 13-1 ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร โดยใช้การถามตอบ ประกอบการอธิบายและพิจารณาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบวกที่สามารถเขียนอยู่ในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม (ขั้นการหาความสัมพันธ์)
5. ครูให้นักเรียนสังเกตผลจากการทำกิจกรรมที่ 13-2 ว่า $\log(N_0 \times 10^n)$ กับ $\log(N_0)$ สัมพันธ์กันอย่างไร
6. ครูให้นักเรียนสังเกตผลจากการทำกิจกรรมที่ 13-3 แล้วให้ร่วมกันอภิปรายต่อไปนี้
 - ถ้า A เป็นแอนติลอการิทึมของ B จะได้ว่า A กับ B สัมพันธ์กันอย่างไร
($\log A = B$)
 - แอนติลอการิทึมของ 1.3010 กับ แอนติลอการิทึมของ 0.3010 สัมพันธ์กันอย่างไร
($\text{anti log}(1.3010) = \text{anti log}(0.3010) \times 10^1$)
 - แอนติลอการิทึมของ 2.3010 กับ แอนติลอการิทึมของ 0.3010 สัมพันธ์กันอย่างไร
($\text{anti log}(2.3010) = \text{anti log}(0.3010) \times 10^2$)
 - แอนติลอการิทึมของ 3.3010 กับ แอนติลอการิทึมของ 0.3010 สัมพันธ์กันอย่างไร
($\text{anti log}(3.3010) = \text{anti log}(0.3010) \times 10^3$)
 - นักเรียนสามารถหาค่าแอนติลอการิทึมของ B โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ได้อย่างไร
(กด 10 ยกกำลัง B เช่นจะหาค่า $\text{anti log}(0.4771)$ ทำได้ดังนี้

กด $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\log_{10}} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{4} \boxed{7} \boxed{7} \boxed{1} \boxed{=}$



10^{0.4771}
2.99853181

ดังนั้นจะได้ว่า $\text{anti log}(0.4771) \approx 2.9998 \approx 3$

7. ให้นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ที่ได้จากใบกิจกรรมที่ 13-1, 13-2 และ 13-3 ดังนี้

ใบกิจกรรมที่ 13-1 สามารถสรุปความสัมพันธ์ได้ดังนี้

- $\log_{10} N = \log N$
- $\log 10^n = n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ใบกิจกรรมที่ 13-2 สามารถสรุปความสัมพันธ์ได้ดังนี้

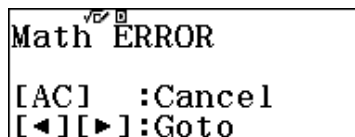
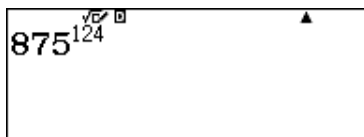
ถ้า N เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ และเขียน N ในรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $N = N_0 \times 10^n$

$$\log N = \log N_0 + n$$

ใบกิจกรรมที่ 13-3 A เป็นแอนติลอการิทึมของ B ก็ต่อเมื่อ $B = \log A$

8. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดที่ 2.4 ในหนังสือเรียน สสวท. รายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 หน้า 161 โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ เพื่อเพิ่มความเข้าใจในการหาค่าลอการิทึม ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนมาเฉลยคำตอบพร้อมให้นักเรียนคนอื่น ๆ ตรวจสอบความถูกต้อง โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งและอธิบายเพิ่มเติม (ขั้นการฝึกทักษะ)
9. ครูนำเสนอโจทย์ประยุกต์ ดังนี้ จงหาว่า 875^{124} เป็นจำนวนที่มีกี่หลัก และให้นักเรียนลองใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ทดเพื่อแสดงคำตอบซึ่งจะได้ผลลัพธ์ ดังนี้ (ขั้นประยุกต์ใช้)

a.



- b. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าเหตุใดเครื่องคำนวณจึงไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้ (จำนวนดังกล่าวมีค่ามากกว่า 100 หลัก)
- c. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงวิธีการหาค่าของจำนวนดังกล่าวว่าควรใช้ความรู้เรื่องใดในการหาค่า (ลอการิทึม)
- d. ปัญหาดังกล่าวมีวิธีการหาคำตอบดังนี้

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ ให้ } N &= 875^{124} \\ \text{จะได้ } \log N &= \log(875^{124}) \\ &= 124 \log(875) \quad (\text{หาค่าโดยใช้เครื่องคำนวณ}) \\ &\approx 364.8089986 \end{aligned}$$

$$\approx 364 + 0.8089986$$

(หาค่า $\text{antilog}(0.8089986)$ โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์หาค่า $10^{0.8089986}$ โดย

$$10^{0.8089986} \approx 6.4417$$

ดังนั้น $\text{antilog}(0.8089986) = 6.4417$ จึงได้ว่า $0.8089986 = \log 6.4417$)

$$\approx 364 + \log 6.4417$$

$$\approx \log(6.4417 \times 10^{364})$$

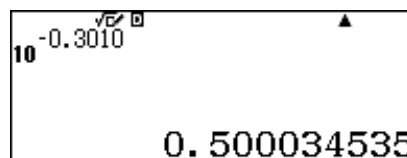
$$N \approx 6.4417 \times 10^{364}$$

ดังนั้น 875^{124} เป็นจำนวนที่มี 365 หลัก

10.ให้คุณครูยกตัวอย่างที่นักเรียนมักเข้าใจผิด เพื่อปรับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการหาแอนติลอการิทึมของจำนวนจริงลบ ตัวอย่างเช่น $\text{antilog}(-0.3010)$

นักเรียนมักจะเข้าใจผิดว่า $\text{antilog}(-0.3010) = -\text{antilog}(0.3010)$

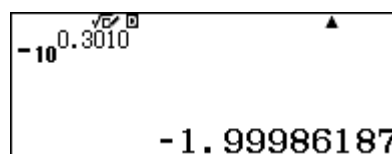
ให้นักเรียนตรวจสอบการหาค่า $\text{antilog}(-0.3010)$ โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ ดังนี้



10^{-0.3010}
0.500034535

จะได้ว่า $\text{antilog}(-0.3010) \approx 0.5$

และหาค่าของ $-\text{antilog}(0.3010)$ โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ ดังนี้



-10^{0.3010}
-1.99986187

จะได้ว่า $-\text{antilog}(0.3010) \approx -2$

ดังนั้น $\text{antilog}(-0.3010) \neq -\text{antilog}(0.3010)$

ซึ่งการหาแอนติลอการิทึมของจำนวนจริงลบทำได้ดังนี้

ให้	$\text{antilog}(-0.3010)$	$= N$
จะได้	$\log N$	$= -0.3010$
จึงได้	$\log N$	$= -0.3010 + 1 - 1$
		$= 0.6990 - 1$

$$= \log 5 + \log 10^{-1}$$

$$= \log(5 \times 10^{-1})$$

ดังนั้น $\text{antilog}(-0.3010) = 5 \times 10^{-1} = 0.5$

11. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปและอภิปรายการหาค่าลอการิทึม

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 13-1 มาตรฐานการหาค่าลอการิทึม
2. ใบกิจกรรมที่ 13-2 การหาค่าลอการิทึม
3. ใบกิจกรรมที่ 13-3
4. แบบฝึกหัดที่ 2.4 หน้า 161 ในหนังสือเรียน สสวท. รายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
5. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

การวัดและการประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 13-1 มาตรฐานการหาค่าลอการิทึม
2. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 13-2 การหาค่าลอการิทึม
3. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 13-3
4. ประเมินจากการทำแบบฝึกหัดที่ 2.4 หน้า 161 ในหนังสือเรียน สสวท. รายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
5. ประเมินจากการตอบคำถามในชั้นเรียน

ใบกิจกรรมที่ 13-1

มารู้จักลอการิทึมสามัญกันเถอะ

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาคำตอบ และเติมลงในช่องว่าง

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนสำรวจค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. $\log_{10} 2 = \dots\dots\dots$ | $\log 2 = \dots\dots\dots$ |
| 2. $\log_{10} 5 = \dots\dots\dots$ | $\log 5 = \dots\dots\dots$ |
| 3. $\log_{10} 8 = \dots\dots\dots$ | $\log 8 = \dots\dots\dots$ |
| 4. $\log_{10} 0.191 = \dots\dots\dots$ | $\log 0.191 = \dots\dots\dots$ |
| 5. $\log_{10} 178.2 = \dots\dots\dots$ | $\log 178.2 = \dots\dots\dots$ |

จากการสำรวจ $\log_{10} n$ และ $\log n$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

.....

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\log 10^3 = \dots\dots\dots$ | 2. $\log 10^2 = \dots\dots\dots$ |
| 3. $\log 10^1 = \dots\dots\dots$ | 4. $\log 10^0 = \dots\dots\dots$ |
| 5. $\log 10^{-1} = \dots\dots\dots$ | 6. $\log 10^{-2} = \dots\dots\dots$ |
| 7. $\log 10^{-3} = \dots\dots\dots$ | 8. $\log 10^{-4} = \dots\dots\dots$ |

จากกิจกรรมข้างต้นสรุปได้ว่า เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม $\log 10^n = \dots\dots\dots$

ใบกิจกรรมที่ 13-2

การหาค่าลอการิทึม

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาคำตอบ และเติมลงในช่องว่าง

ตอนที่ 1 สำนวนค่าของลอการิทึมต่อไปนี้ ประมาณค่าในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง

- 1) $\log 5.760 \approx \dots\dots\dots$
- 2) $\log 57.60 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 57.60 \approx \log 5.76 + \dots\dots\dots$
- 3) $\log 576.0 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 576.0 \approx \log 5.76 + \dots\dots\dots$
- 4) $\log 5760 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 576.0 \approx \log 5.76 + \dots\dots\dots$
- 5) $\log 0.576 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 0.576 \approx \log 5.76 + \dots\dots\dots$
- 6) $\log 0.0576 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 0.0576 \approx \log 5.76 + \dots\dots\dots$
- 7) $\log 0.00576 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 0.00576 \approx \log 5.76 + \dots\dots\dots$
- 8) $\log 4.710 \approx \dots\dots\dots$
- 9) $\log 47.10 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 47.10 \approx \log 4.71 + \dots\dots\dots$
- 10) $\log 471.0 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 471.0 \approx \log 4.71 + \dots\dots\dots$
- 11) $\log 4710 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 4710 \approx \log 4.71 + \dots\dots\dots$
- 12) $\log 0.471 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 0.471 \approx \log 4.71 + \dots\dots\dots$
- 13) $\log 0.0471 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 0.0471 \approx \log 4.71 + \dots\dots\dots$
- 14) $\log 0.00471 \approx \dots\dots\dots$ และจะได้ว่า $\log 0.00471 \approx \log 4.71 + \dots\dots\dots$

จากการสำรวจข้างต้นจะได้ว่า $\log(N_0 \times 10^n) = \dots\dots\dots$

ใบกิจกรรมที่ 13-3

แอนติลอการิทึม

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาคำตอบ และเติมลงในช่องว่าง

1. $\log N = 0.3010$ จะได้ $N \approx 10^{0.3010} \approx 2$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 0.3010 คือ
2. $\log N = 1.3010$ จะได้ $N \approx 10^{1.3010} \approx \dots\dots\dots$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 1.3010 คือ
3. $\log N = 2.3010$ จะได้ $N \approx \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 2.3010 คือ
4. $\log N = 3.3010$ จะได้ $N \approx \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 3.3010 คือ
5. $\log N = 4.3010$ จะได้ $N \approx \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 4.3010 คือ
6. $\log N = 0.4771$ จะได้ $N \approx \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 0.4771 คือ
7. $\log N = 1.4771$ จะได้ $N \approx \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 1.4771 คือ
8. $\log N = 2.4771$ จะได้ $N \approx \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$
ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 2.4771 คือ

9. $\log N = 3.4771$ จะได้ $N \approx \dots \approx \dots$
 ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 3.4771 คือ

10. $\log N = 4.4771$ จะได้ $N \approx \dots \approx \dots$
 ดังนั้น แอนติลอการิทึมของ 4.4771 คือ

จากกิจกรรมข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) A เป็นแอนติลอการิทึมของ B ก็ต่อเมื่อ
- 2) แอนติลอการิทึมของ 1.3010 กับ แอนติลอการิทึมของ 0.3010 สัมพันธ์กันอย่างไร

- 3) แอนติลอการิทึมของ 2.3010 กับ แอนติลอการิทึมของ 0.3010 สัมพันธ์กันอย่างไร

- 4) แอนติลอการิทึมของ 3.3010 กับ แอนติลอการิทึมของ 0.3010 สัมพันธ์กันอย่างไร

- 5) นักเรียนสามารถหาค่าแอนติลอการิทึมของ B โดยใช้เครื่องคำนวณได้อย่างไร
